Universidade de Aveiro **Departamento de Matemática**

Aplicações lineares

1. Averigue se são aplicações lineares as funções definidas por

   (a) $\phi(x,y) = (x+1, y, x+y)$; (b) $\phi(x,y,z) = (x+y, y, x-z)$;

   (c) $\phi(x,y,z) = (x+y, 0, 2x-z)$; (d) $\phi(x,y,z) = (x-y, x^2, 2z)$;

   (e) $\phi(at^2+bt+c) = at+b+1$; (f) $\phi(at^2+bt+c) = a+(t+1)(bt+c)$.

2. Seja $\phi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por

$$\phi(A) = \begin{cases} A^{-1} & \text{se } A \text{ não é singular} \\ 0 & \text{se } A \text{ é singular} \end{cases}$$

   para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Averigue se ϕ é uma aplicação linear.

3. Dada uma matriz A $n \times n$, defina-se $\phi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ por $\phi(B) = AB - BA$ para $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Averigue se ϕ é uma aplicação linear.

4. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear, satisfazendo $\phi(1,1) = (2,-3)$ e $\phi(0,1) = (1,2)$. Determine

   (a) $\phi(3,-2)$; (b) $\phi(a,b)$.

5. Seja $\phi : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ uma aplicação linear tal que $\phi(1) = 1$, $\phi(t) = t^2$ e $\phi(t^2) = t^3 + t$. Determine

   (a) $\phi(2t^2 - 5t + 3)$; (b) $\phi(at^2 + bt + c)$.

Matriz de uma aplicação linear

6. Seja $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por

$$\phi(x,y,z) = (x+2y+z, 2x-y, 2y+z).$$

   Seja $\mathcal{C}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B} = \big((1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\big)$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz representativa de ϕ relativamente

   (a) à base $\mathcal{C}$; (b) às bases $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$; (c) às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$; (d) à base $\mathcal{B}$;

   e determine $\phi(1,1,-2)$ usando cada uma das matrizes obtidas em (a)–(d).

7. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

   Sejam $\mathcal{S} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ e $\mathcal{T} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respetivamente.

   (a) Determine a matriz representativa de ϕ relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

   (b) Determine a matriz representativa de ϕ relativamente às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ i. diretamente e ii. usando matrizes de mudança de base.

   (c) Determine $\phi\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$, usando cada uma das matrizes obtidas anteriormente.

8. Seja $\phi : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ uma aplicação linear definida por

$$\phi(at^2 + bt + c) = (a + 2c)t^2 + (b - c)t + (a - c)$$

e sejam $\mathcal{S} = (t^2, t, 1)$ e $\mathcal{T} = (t^2 - 1, t, t - 1)$ bases de $\mathcal{P}_2$.

   (a) Encontre a matriz representativa de ϕ relativamente às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$.

   (b) Determine $\phi(2t^2 - 3t + 1)$ usando a alínea anterior.

9. Dada a matriz C $n \times n$, considere-se $\phi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por $\phi(A) = CA$ para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

   (a) Mostre que ϕ é uma aplicação linear.

   (b) Considerando $n = 2$, sejam $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{S} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ uma base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ e $\mathcal{C}$ a base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Determine a matriz representativa de ϕ relativamente

      i. à base $\mathcal{C}$; ii. às bases $\mathcal{C}$ e $\mathcal{S}$; iii. às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{C}$; iv. à base $\mathcal{S}$.

10. Sejam $X_1 = t + 1$, $X_2 = t - 1$, $Y_1 = t^2 + 1$, $Y_2 = t$, $Y_3 = t - 1$ e $\phi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ a aplicação linear tal que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

é a matriz que representa ϕ relativamente às bases $\mathcal{S} = (X_1, X_2)$ e $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$. Determine

   (a) os vetores das coordenadas de $\phi(X_1)$ e $\phi(X_2)$ na base $\mathcal{T}$;

   (b) $\phi(X_1)$ e $\phi(X_2)$;

   (c) $\phi(2t + 1)$;

   (d) $\phi(at + b)$.

11. Determine a matriz representativa da aplicação linear $\phi : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definida por $\phi\big(p(t)\big) = p''(t) + p(0)$ relativamente à

   (a) base canónica de $\mathcal{P}_3$;

   (b) base $\mathcal{T} = (t^3, t^2 - 1, t, 1)$ de $\mathcal{P}_3$, diretamente e usando matrizes de mudança de base.

12. Se $\mathrm{id}_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ é a aplicação identidade definida por $\mathrm{id}_{\mathcal{V}}(X) = X$ para qualquer $X \in \mathcal{V}$, mostre que a matriz de $\mathrm{id}_{\mathcal{V}}$ relativamente a qualquer base de $\mathcal{V}$ é a matriz identidade I_n com $n = \dim \mathcal{V}$.

Núcleo e imagem de uma aplicação linear

13. Seja $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por $\phi(x, y, z, w) = (x + y, z + w, x + z)$.

   (a) Determine o núcleo e a imagem de ϕ.

   (b) Encontre uma base para o núcleo e uma base para a imagem de ϕ.

   (c) Averigue se ϕ é injetiva e/ou sobrejetiva.

   (d) Verifique o Teorema das Dimensões.

14. Seja $\phi : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ uma aplicação linear definida por $\phi(at^2 + bt + c) = (a + c)t^2 + (b + c)t$.

   (a) Verifique se os elementos $t^2 - t - 1$ e $t^2 + t - 1$ pertencem a $\ker(\phi)$.

   (b) Verifique se os elementos $2t^2 - t$ e $t^2 - t + 2$ pertencem a $\mathrm{im}(\phi)$.

   (c) Determine uma base para $\ker(\phi)$ e uma base para $\mathrm{im}(\phi)$.

   (d) Diga, justificando, se ϕ é injetiva e/ou sobrejetiva.

15. Encontre uma base para o núcleo e uma base para a imagem da aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por

   (a) $\phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a - b & b - c \\ a - d & b - d \end{bmatrix}$;

   (b) $\phi(A) = A^T$.

16. Considere a aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(X) = AX$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
    (a) Verifique que a matriz de ϕ relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^2$ é a matriz A.
    (b) Sem determinar o núcleo de ϕ, verifique que $\dim \ker(\phi) \geq 2$.
    (c) Sejam $\mathcal{S} = \big((1,1,1,0),(1,1,1,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1)\big)$ e $\mathcal{T} = \big((1,1),(1,-1)\big)$ bases de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^2$, respetivamente. Determine a matriz de ϕ relativamente
    i. à base $\mathcal{S}$ e à base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$; ii. às bases $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$,

17. Seja $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear representada relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ pela matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$
    (a) Determine $\phi(1,2,3)$ e $\phi(x,y,z)$ para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
    (b) Averigue se ϕ é um isomorfismo.
    (c) Determine a imagem de ϕ e uma sua base, o núcleo de ϕ e uma sua base.
    (d) Determine a matriz de ϕ relativamente à base $\mathcal{B} = \big((1,1,0),(1,1,1),(1,0,0)\big)$
    i. por definição; ii. usando matrizes de mudança de base.

18. Seja $\mathcal{B} = \big((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\big)$ e considere a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$\phi(1,1,1) = (-1,1), \qquad \phi(1,1,0) = (1,1), \qquad \phi(1,0,0) = (0,2).$$
    (a) Determine a matriz de ϕ relativamente à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica $\mathbb{R}^2$.
    (b) Calcule $\phi(X)$ sabendo que $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
    (c) Determine a matriz de ϕ relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$.
    (d) Determine $\phi(x,y,z)$ para um elemento genérico (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$.
    (e) Determine o núcleo de ϕ e indique uma base para este subespaço de $\mathbb{R}^3$.
    (f) Diga, justificando, se ϕ é injetiva.
    (g) Sem determinar a imagem de ϕ, diga qual a dimensão deste subespaço, usando i. a característica de uma das matrizes representativas de ϕ e ii. o Teorema das Dimensões.
    (h) Usando a dimensão da imagem de ϕ como justificação, diga se ϕ é sobrejetiva.
    (i) Determine a imagem de ϕ, assim como uma base para este subespaço de $\mathbb{R}^2$ a partir i. da matriz calculada em (c) e ii. da imagem do elemento genérico $\phi(x,y,z)$ calculada em (d).

19. Considere a aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\phi(1,1) = (3,0,2)$ e $\phi(1,-1) = (1,0,2)$.
    (a) Determine $\phi(x,y)$ para um elemento genérico (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
    (b) Determine uma base para a imagem de ϕ. Diga, justificando, se ϕ é sobrejetiva.
    (c) Sem determinar o núcleo de ϕ, indique a sua dimensão. Diga, justificando, se ϕ é injetiva.
    (d) Determine a matriz que representa ϕ relativamente às bases
$$\mathcal{S} = \big((1,1),(1,-1)\big) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{T} = \big((0,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\big).$$
    (e) Calcule $[X]_{\mathcal{S}}$ sabendo que $[\phi(X)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

20. Considere a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Indique qual é o transformado $\phi(x, y, z)$ de um elemento genérico (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Determine a imagem de ϕ e uma base para este subespaço e indique a sua dimensão.
   (c) Diga, justificando, se ϕ é sobrejetiva.
   (d) Sem calcular o núcleo de ϕ, indique, justificando, a sua dimensão e averigue se ϕ é injetiva.
   (e) Calcule a matriz de ϕ relativamente à base $\mathcal{B} = \big((1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\big)$.
   (f) Sabendo que $[Y]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,
      i. verifique que $Y \in \operatorname{im}(\phi)$;
      ii. determine o vetor de coordenadas na base $\mathcal{B}$ de X, $[X]_{\mathcal{B}}$, sendo X um vetor tal que $\phi(X) = Y$.

21. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial real de dimensão n e $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma base de $\mathcal{V}$. Seja $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}$ definida por

$$\phi(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n.$$

Mostre que ϕ é um isomorfismo.

22. Seja $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ uma aplicação linear.
   (a) Se $\dim \ker(\phi) = 2$, qual é a dimensão de $\operatorname{im}(\phi)$?
   (b) Se $\dim \operatorname{im}(\phi) = 3$, qual é a dimensão de $\ker(\phi)$?

23. Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^5$ uma aplicação linear.
   (a) Se ϕ é sobrejetiva e $\dim \ker(\phi) = 2$, qual é a dimensão de $\mathcal{V}$?
   (b) Se ϕ é bijetiva, qual é a dimensão de $\mathcal{V}$?

24. Seja $\phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Mostre que
   (a) $\dim \operatorname{im}(\phi) \leq \dim \mathcal{V}$;
   (b) se ϕ é sobrejetiva, então $\dim \mathcal{W} \leq \dim \mathcal{V}$.

25. Considere $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear definida por $\phi_A(X) = AX$, onde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
   (a) Mostre que ϕ_A é injetiva se e só se $\det(A) \neq 0$.
   (b) Verifique que A é diagonalizável com vetores próprios linearmente independentes $X_1, \ldots, X_n$ se e só se a matriz representativa de ϕ_A relativamente à base $\mathcal{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ é diagonal.
   (c) Se A é uma matriz ortogonal, mostre que $\phi_A(X) \cdot \phi_A(Y) = X \cdot Y$, para todo $X, Y \in \mathbb{R}^n$.
   (d) Um subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^n$ diz-se ϕ_A-invariante se $\phi_A(X) \in \mathcal{W}$, para todo $X \in \mathcal{W}$. Mostre que
      i. o subespaço próprio de A associado a um valor próprio λ é ϕ_A-invariante;
      ii. o núcleo e a imagem de ϕ_A são subespaços ϕ_A-invariantes.
   (e) Considerando $n = 3$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

   determine uma matriz diagonal D representativa da aplicação linear ϕ_A relativamente a uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, indicando essa base.

1. (a) Não; (b) sim; (c) sim; (d) não; (e) não; (f) sim.

2. Não.

3. Sim.

4. (a) $(1,-19)$; (b) $(a+b,-5a+2b)$.

5. (a) $3+2t-5t^2+2t^3$; (b) $c+at+bt^2+at^3$.

6. (a) $M(\phi,\mathcal{C},\mathcal{C})=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&-1&0\\0&2&1\end{bmatrix}$; (b) $M(\phi,\mathcal{C},\mathcal{B})=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&-1&0\\-3&1&0\end{bmatrix}$; (c) $M(\phi,\mathcal{B},\mathcal{C})=\begin{bmatrix}2&3&1\\2&-1&0\\1&3&1\end{bmatrix}$; $M(\phi,\mathcal{B},\mathcal{B})=\begin{bmatrix}2&3&1\\2&-1&0\\-3&1&0\end{bmatrix}$. $\phi(1,1,-2)=(1,1,0)$

7. (a) $M(\phi,\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3)=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\\1&2\end{bmatrix}$; (b) $M(\phi,\mathcal{S},\mathcal{T})=\begin{bmatrix}1&-1/3\\0&2/3\\-1&4/3\end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix}-1\\5\\-4\end{bmatrix}$.

8. (a) $M(\phi,\mathcal{S},\mathcal{T})=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&1&0\\-2&0&-1\end{bmatrix}$. (b) $4t^2-4t-1$.

9. (b) i. $M(\phi,\mathcal{C},\mathcal{C})=\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\2&0&3&0\\0&2&0&3\end{bmatrix}$; ii. $M(\phi,\mathcal{C},\mathcal{S})=\begin{bmatrix}3&-2&5&-3\\0&1&0&2\\2&0&3&0\\-2&2&-3&3\end{bmatrix}$; iii. $M(\phi,\mathcal{S},\mathcal{C})=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&2&2\\2&0&3&2\\0&2&3&3\end{bmatrix}$;
iv. $M(\phi,\mathcal{S},\mathcal{S})=\begin{bmatrix}3&-2&2&0\\0&1&2&2\\2&0&3&2\\-2&2&0&1\end{bmatrix}$.

10. (a) $[\phi(X_1)]_{\mathcal{T}}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$, $[\phi(X_2)]_{\mathcal{T}}=\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}$; (b) $\phi(X_1)=t^2+t+2$, $\phi(X_2)=-t+2$; (c) $\frac{3}{2}t^2+t+4$; (d) $\left(\frac{a+b}{2}\right)t^2+bt+2a$.

11. (a) $\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\6&0&0&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$.

13. (a) $\ker(\phi)=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x=-y=-z=t\}$ e $\mathrm{im}(\phi)=\mathbb{R}^3$. (b) Por exemplo, $\{(1,-1,-1,1)\}$ é uma base de $\ker(\phi)$ e $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathrm{im}(\phi)$. (c) ϕ não é injetiva e é sobrejetiva.

14. (a) O primeiro elemento não pertence e o segundo pertence. (b) O primeiro elemento pertence e o segundo não pertence. (c) Por exemplo, $\{t^2+t-1\}$ é uma base de $\ker(\phi)$ e $\{t^2,t\}$ é uma base de $\mathrm{im}(\phi)$. (d) ϕ não é injetiva nem sobrejetiva.

15. (a) $\left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$ é uma base de $\ker(\phi)$ e $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\0&0\end{bmatrix}\right\}$ é uma base da $\mathrm{im}(\phi)$. (b) O conjunto vazio é base de $\ker(\phi)$ e a base canónica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ é uma base da $\mathrm{im}(\phi)$.

16. (c) i. $M(\phi,\mathcal{S},\mathcal{C})=\begin{bmatrix}3&4&4&3\\4&3&2&0\end{bmatrix}$; ii. $M(\phi,\mathcal{S},\mathcal{T})=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}7&7&6&3\\-1&1&2&3\end{bmatrix}$.

17. (a) $\phi(1,2,3) = (9,7,16)$ e $\phi(x,y,z) = (x+y+2z, 2x+y+z, 3x+2y+3z)$. (b) Não. (c) $\mathrm{im}(\phi) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a+b-c=0\}$ e $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ é uma sua base; $\ker(\phi) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ e } y = -3z\}$ e $\{(1,-3,1)\}$ é uma sua base. (d) $\begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 5 & 8 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

18. (a) $M(\phi, \mathcal{B}, \mathcal{C}_2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. (b) $\phi(X) = (1,9)$. (c) $M(\phi, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. (d) $\phi(x,y,z) = (y-2z, 2x-y)$. (e) $\ker(\phi) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ e } y = 2z\}$ e $\{(1,2,1)\}$ é uma sua base. (f) ϕ não é injetiva. (g) 2. (h) ϕ é sobrejetiva. (i) $\mathrm{im}(\phi) = \mathbb{R}^2$.

19. (a) $\phi(x,y) = (2x+y, 0, 2x)$. (b) $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ é uma base para $\mathrm{im}(\phi)$ e ϕ não é sobrejetiva. (c) $\dim\ker(\phi) = 0$ e ϕ é injetiva. (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. (e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

20. (a) $\phi(x,y,z) = (x+2y+z, 3y+z, x-y)$. (b) $\mathrm{im}(\phi) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a-b-c=0\}$, $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ é uma base para $\mathrm{im}(\phi)$ e $\dim\mathrm{im}(\phi) = 2$. (c) ϕ não é sobrejetiva. (d) $\dim\ker(\phi) = 1$ e ϕ não é injetiva. (e) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. (f) ii. Por exemplo, $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$.

22. (a) 2; (b) 1.

23. (a) 7; (b) 5.

25. (e) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ é a matriz representativa de ϕ em relação à base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.